Universidad De Atacama

Facultad De Ingeniería – Departamento De Matemática

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

GUÍA 4: VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Profesor: Hugo S. Salinas. Primer Semestre 2012

---

1. Una variable aleatoria tiene la siguiente función de probabilidad,

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.05	0.20	0.05	0.45	0.25

   a) Comprobar que es una función de probabilidad.
   b) Calcular $P(X \leq 3)$.
   c) Calcular $P(X > 3)$.
   d) Calcular $P(X = 1 \cup X = 3 \cup X = 5)$.
   e) Calcular $E(X)$.

   R: b) 0.3 c) 0.7 d) 0.35 y e) 3.65.

2. Sea R variable aleatoria cuya distribución de probabilidad viene dada por:

$$P(R=r) = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{1}{r!(4-r)!}, & r = 0,1,2,3,4, \\ 0 & \text{e.o.c..} \end{cases}$$

   Calcular:

   a) $P(R = 3)$.
   b) $P(1 \leq R \leq 2.5)$.
   c) $P(R \leq 2.5)$

   R: a) 1/4 b) 5/8 y c) 11/16.

3. La cantidad aleatoria de dinero ahorrado por una persona en un mes sigue una ley de probabilidad dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{4}, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x. \end{cases}$$

   donde x viene expresado en cientos de dólares. Determinar la probabilidad de que, en un mes la cantidad de dinero ahorrado:

   a) Sea superior a 200 dólares.
   b) Sea inferior a 450 dólares.
   c) Sea superior a 50 dólares y menor o igual a 250 dólares.
   d) Calcular el ahorro mensual medio.

R: a) 0.5 b) 1 c) 3/8 y d) 175 dólares.

4. Para estudiar si las ratas tienen visión cromática, en una caja que cuenta con tres palancas se marca en rojo aquella que al pulsarla proporciona alimento. En cada prueba la posición de este pulsador se cambia aleatoriamente. Se somete una rata a cuatro pruebas. Sea X : número de pulsaciones que consiguen alimento, si la rata no distinguiera el rojo y pulsase al azar.

   a) Calcular el rango de la variable aleatoria X.

   b) Encontrar la distribución de probabilidades de X.

   c) ¿Cuál es el número esperado de pulsaciones que debe realizar la rata para conseguir alimento?

   R: a) {0,1,2,3,4} y c) 1.33.

5. Supongamos que una persona pasa tres semáforos cada mañana en su camino al trabajo. Los semáforos operan independientemente y debido a que la distancia entre ellos es grande, también operan independientemente respecto a una persona que camina de uno hacia otro. La probabilidad de una luz roja es 0.4, 0.8 y 0.5, respectivamente, para cada uno de los semáforos. Sea X el número de luces rojas que la persona encuentra en su camino de ida. Considerar que la persona, durante un año hace 250 viajes a su trabajo.

   a) Calcular el recorrido de la variable X.

   b) Calcular la distribución de probabilidad de X.

   c) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

   R: a) {0,1,2,3} c) $E(X) = 1.7$ y $Var(X) = 0.65$.

6. *El problema de Galileo*. Un príncipe italiano preguntó en una ocasión al famoso físico Galileo, ¿por qué cuando se lanzan tres dados, se obtiene con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque se puedan obtener de seis maneras distintas cada una?. En relación a esta situación:

   a) Determinar el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio.

   b) Identificar la variable aleatoria X asociada a este experimento.

   c) ¿Cuál es el rango de X?

   d) Calcular $P(dados\ sumen\ 9)$ y $P(dados\ sumen\ 10)$.

   R: d) 0.116 y 0.125.

7. Las máquinas tejedoras en una fábrica de elástico usan rayo laser para detectar los hilos rotos. Cuando se rompe un hilo, es necesario detener la máquina para efectuar la reparación. Sea X el número de veces que se detiene cada día una máquina específica, donde su función de probabilidad está dada por
$$P(X = x) = \frac{16}{31}\left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

   a) ¿Cuál es el promedio esperado diario de detenciones de la máquina?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado se detenga la máquina a lo más dos veces?

   R: a) 0.82 detenciones y b) 0.91.

8. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho,

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

b) ¿Y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

R: a) 0.27067 b) 0.2381 y c) 0.54207.

9. Resolver los siguientes problemas:

a) Se lanza un dado consecutivamente hasta que aparezca por primera vez un **1**. Supongamos que en el primer lanzamiento no hemos obtenido un **1**. Calcular la probabilidad de que sean necesarios más de tres lanzamientos para conseguir el **1** por primera vez.

b) Un vendedor de enciclopedias sabe que la probabilidad de obtener un cliente en cada visita es 0.3. Si este vendedor detiene sus ventas cuando logra vender la décima enciclopedia en el día. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo largo de un mes de 30 días, no tenga que hacer más de 40 visitas diarias?. (Asumir independencia entre las visitas diarias).
Ayuda: Pensar la situación en que a lo largo de un día el vendedor no tenga que hacer más de 40 visitas y luego extenderlo a lo largo de 30 días. Dejar planteado el resultado final.

c) En el juego del KINO se tienen 25 bolitas y se extraen 14 de ellas. Se sabe que el premio menor (recuperar el dinero) se obtiene a los 10 aciertos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener algún premio en el juego (al menos se recupere el dinero).

d) Del problema *c*). ¿Cuántos cartones deberías jugar para aspirar a ganar algún premio?

e) Cierto banco ha comprobado que la probabilidad de que un cliente con fondos extienda un cheque con fecha equivocada es de 0.001. En cambio, todo cliente sin fondos pone una fecha errónea en sus cheques. El 90 % de los clientes del banco tienen fondos.
Si llegan 6 cheques con fecha equivocada, ¿cuál es la probabilidad que al menos uno de estos haya sido emitido por un cliente con fondos?

R: a) 0.694 b) $\sum_{x=11}^{39}\binom{x-1}{9}(0.7)^{x-10}(0.3)^{10}$ c) 0.0887 d) 11.27 y e) 0.052

10. En un programa de TV se decide votar por la persona que quieres que abandone el concurso. Se sabe que tienes una probabilidad del 20 % de que la línea **no esté ocupada**. Supongamos que cada llamada que realizas es independiente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llamada que entre sea la décima que realizas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario llamar 10 veces para votar dos veces por el concursante?

c) Supongamos que compras una tarjeta que permite realizar 15 llamadas telefónicas al concurso. Si agotas tus llamadas, ¿cuál es la probabilidad de votar al menos tres veces?

d) La telefonista del programa de TV contesta en promedio 12 llamadas cada 15 minutos.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 10 llamadas sean recibidas en el periodo de 15 minutos?.

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 5 llamadas sean recibidas por la telefonista en 5 minutos?.

iii. ¿Cuántas llamadas se espera contestar durante el período de una hora?

e) Se sabe que durante el período de una hora 100 personas intentaron comunicarse de las cuales solamente 40 pudieron efectivamente votar por el concursante. Al extraer una muestra aleatoria de tamaño 20 de los números registrados. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 8 llamadas seleccionadas hayan votado por el participante?

R: a) 0.027 b) 0.060 c) 0.6019 d) i. 0.1048 ii. 0.7851 iii. 48 y e) 0.20078

11. La probabilidad de que un Banco reciba un cheque sin fondos es 1 %.

a) Si en una hora reciben 20 cheques, ¿cuál es la probabilidad de que se tenga algún cheque sin fondos?

b) El Banco dispone de 12 sucursales en la capital, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de las sucursales reciban algún cheque sin fondos?

c) Si la media del valor de los cheques sin fondos es de $580000 y el Banco trabaja 6 horas diarias, ¿qué cantidad total de pesos no se espera pagar?

d) Si se computaran los primeros 500 cheques, ¿cuál es la probabilidad de recibir entre 3 y 6 (inclusive) cheques sin fondos?

R: a) 0.182 b) 0.1599 c) $696000 y d) 0.6376.

12. Una caja contiene 100 artículos, de los que 4 son defectuosos. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados en una muestra de tamaño 9.

    a) Calcular $P(X = 2)$

    b) Aproximar la probabilidad anterior por una Binomial.

    c) Aproximar la probabilidad anterior por una Poisson.

    R: a) 0.0376 b) 0.0432 y c) 0.0452.

13. Una agencia inmobiliaria dedicada a la venta de departamentos en Caldera ha realizado un estudio de ventas, comprobando que solo el 5 % de las personas que acuden a visitar el piso piloto compran un departamento. Se pide:

    a) Calcular la probabilidad de que tenga que recibir 10 visitas hasta vender un departamento.

    b) Calcular la probabilidad de que tenga que recibir 10 visitas hasta vender dos departamentos.

    c) Se han tenido que recibir 10 visitas hasta vender 2 departamentos. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 primeras visitas no efectuaran ninguna compra?

    R: a) 0.03151 b) 0.01493 y c) 6/9.

14. Un lote contiene 100 piezas de un proveedor de tubería local y 200 unidades de un proveedor de tubería del estado vecino. Si se seleccionan cuatro piezas al azar y sin reemplazo,

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del proveedor local?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

    R: a) 0.0119 b) 0.408 y c) 0.196.

15. Supongamos que el número de imperfecciones en un alambre delgado de cobre sigue una distribución Poisson con una media de 2.3 imperfecciones por milímetro.

    a) Calcular la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.

    b) Calcular la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.

    c) Calcular la probabilidad de al menos una imperfección en 2mm de alambre

    R: a) 0.265 b) 0.113 y c) 0.9899.