UNIVERSIDAD DE ATACAMA

FACULTAD DE INGENIERÍA / DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

PAUTA DE CORRECCIÓN PRUEBA N°1

Profesor: Hugo S. Salinas.

Segundo Semestre 2010

1. Unos transductores de temperatura de cierto tipo se embarcan en lotes de 50. Se seleccionó una muestra de 60 lotes y se determinó la cantidad de transductores en cada lote que no se apegaban a las especificaciones de diseño; y resultaron los siguientes datos:

2	1	2	4	0	1	3	2	0	5	3	3	1	3	2	4	7	0	2	3
0	4	2	1	3	1	1	3	4	1	2	3	2	2	8	4	5	1	3	1
5	0	2	3	2	1	0	6	4	2	1	6	0	3	3	3	6	1	2	3

a) Sea X : número de transductores defectuosos, tal que $\sum_i X_i = 152$ y $\sum_i X_i^2 = 582$. Calcular la media y desviación estándar muestral.

<u>Solución</u>

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n} = \frac{152}{60} = 2.53, \qquad \overline{X^2} = \frac{\sum_i X_i^2}{n} = \frac{582}{60} = 9.7,$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}[\overline{X^2} - \overline{X}^2] = \frac{60}{59}[9.7 - 2.53^2] = 3.36$$

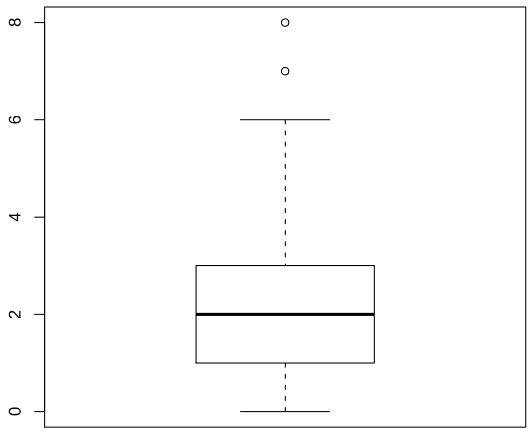
Por lo tanto $\overline{X} = 2.53$ y $S = \sqrt{3.36} = 1.83$.

(6 ptos.)

b) Trazar un box-plot indicando claramente sus cinco componentes (Min, Max, Q_1, Q_2 y Q_3). Analizar la existencia de datos outliers.

<u>Solución</u>

Los cinco números son: Min: 0, Max: 8, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$ y $Q_3 = 3$. Rango intercuartil $RI = Q_3 - Q_1 = 2$. Para buscar datos extremos calculamos los límites admisibles: $LI = Q_1 - 1.5RI = 1 - (1.5)2 = -2$ y $LS = Q_3 + 1.5RI = 3 + (1.5)2 = 6$. Por lo tanto hay dos datos outliers: 7 y 8.



(6 ptos.)

c) ¿Se puede decir que la distribución de X es simétrica?. Justificar tu respuesta.
Solución
La distribución no es simétrica. De hecho, es sesgada hacia la derecha. Tiene datos extremos hacia la cola derecha.

(6 ptos.)

d) Suponer que el Mínimo fue eliminado. ¿Cómo cambiaría la media y la mediana?
Solución
Si eliminamos los ceros (son 7), la media y la mediana aumentan. La suma $\sum_i X_i = 152$ queda igual, sin embargo ahora son 53 datos. Por lo tanto:

$$\overline{X} = \frac{152}{53} = 2.87, \qquad M_d = 3$$

(6 ptos.)

2. La probabilidad que la construcción de un edificio termine a tiempo es 17/20, la probabilidad que no haya huelga es 3/4, y la probabilidad que la construcción se termine a tiempo dado que no hubo huelga es 14/15, la probabilidad que haya huelga y no se termine la construcción a tiempo es 1/10.

a) ¿Cuál es la probabilidad que la construcción se termine a tiempo y no haya huelga?
Solución
Definamos los siguientes eventos:
A : la construcción se termina a tiempo
H : no haya huelga
Del enunciado tenemos:

$$P(A) = \frac{17}{20}, \quad P(H) = \frac{3}{4}, \quad P(A|H) = \frac{14}{15}, \quad P(A' \cap H') = \frac{1}{10}$$

Se pide $P(A \cap H)$. Sabemos que $P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$ de donde

$$\frac{14}{15} = \frac{P(A \cap H)}{3/4} \Rightarrow P(A \cap H) = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{10} = 0.7$$

(6 ptos.)

b) ¿Cuál es la probabilidad que no haya huelga dado que la construcción se terminó a tiempo?
Solución

$$P(H|A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)} = \frac{7/10}{17/20} = \frac{7}{10} \cdot \frac{20}{17} = \frac{14}{17} = 0.82$$

(6 ptos.)

c) ¿Cuál es la probabilidad que la construcción no se termine a tiempo si hubo huelga?
Solución

$$P(A'|H') = \frac{P(A' \cap H')}{P(H')} = \frac{1/10}{1/4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(6 ptos.)

d) ¿Cuál es la probabilidad que la construcción no se termine a tiempo si no hubo huelga?
Solución

$$P(A'|H) = 1 - P(A|H) = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15} = 0.07$$

(6 ptos.)

3. Una compañía que concierta citas por Internet tiene en sus archivos los nombres y direcciones de 200 mujeres. De estas 200 mujeres, un total de 35 miden 1.65 metros o menos de estatura, 60 son rubias, 12 de las rubias miden 1.65 metros o menos. Perico Pérez envía su solicitud por e-mail:

a) ¿Cuál es la probabilidad que reciba el nombre de una rubia?
Solución
Para facilitar, primero se construimos una tabla con los datos del problema:

	Estatura		
Color	1.65 mts. o menos	Más de 1.65 mts.	
Rubia	12	48	60
No es rubia	23	117	140
	35	165	200

Ahora definimos los eventos:
R : recibe el nombre de una mujer rubia
E : mujer de estatura 1.65 mts. o menos
Por lo tanto aquí se pide:

$$P(R) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0.3$$

(6 ptos.)

b) ¿Cuál es la probabilidad que reciba el nombre de una rubia y de estatura mayor de 1.65 metros?
Solución

$$P(R \cap E') = \frac{48}{200} = \frac{24}{100} = 0.24$$

(6 ptos.)

c) ¿Cuál es la probabilidad que reciba el nombre de una rubia o de estatura menor de 1.65 metros?
Solución

$$P(R \cup E) = P(R) + P(E) - P(R \cap E) = \frac{60}{200} + \frac{35}{200} - \frac{12}{200} = \frac{83}{200} = 0.415$$

(6 ptos.)

d) ¿Cuál es la probabilidad que reciba el nombre de una que no es rubia o de estatura menor de 1.65 metros?
Solución

$$P(R' \cup E) = P(R') + P(E) - P(R' \cap E) = \frac{140}{200} + \frac{35}{200} - \frac{23}{200} = \frac{152}{200} = 0.76$$

(6 ptos.)

4. Se dispone de tres dados A, B y C. El dado A es equilibrado, mientras que el dado B está cargado a favor de los números impares y el C lo está a favor de los pares. Sea $\alpha > 1/2$ la probabilidad de obtener un número impar al lanzar el dado B. Sea $\beta < 1/2$ la probabilidad de obtener un número impar al lanzar el dado C. El experimento consiste en elegir uno de los dados de acuerdo al mecanismo que se indica a continuación y luego lanzarlo tres veces (**siempre el mismo dado**). El mecanismo de selección consiste en lanzar una moneda no equilibrada (con probabilidad de cara 2/3) y seleccionar el dado A si sale cara; de salir sello se elige B o C con igual probabilidad.

a) Describir el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.
Solución

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{CAIII, CAIII', CAII'I, CAII'I', CAI'II, CAI'II', CAI'I'I, CAI'I'I', \\
&= SBIII, SBIII', SBII'I, SBII'I', SBI'II, SBI'II', SBI'I'I, SBI'I'I', \\
&= SCIII, SCIII', SCII'I, SCII'I', SCI'II, SCI'II', SCI'I'I, SCI'I'I'\}
\end{aligned}$$

donde, por ejemplo, $SBII'I$ representa el evento: sale sello y se selecciona el dado B, resulta impar en el primer lanzamiento, par en el segundo lanzamiento e impar en el tercer lanzamiento. Aquí es válido hacer un diagrama de árbol.

(6 ptos.)

b) Calcular la probabilidad de que en el primer lanzamiento del dado aparezca un número par.
Solución
Primero definamos los eventos:

A : dado equilibrado
B : dado cargado $P(\text{impar}) = \alpha > 1/2$
C : dado cargado $P(\text{impar}) = \beta < 1/2$
Moneda: $P(\text{cara}) = 2/3$, Cara $\rightarrow A$, Sello $\rightarrow B$ ó C.
Sean:
H : la moneda mostró cara
I_j : en el lanzamiento j-ésimo aparece un número impar. En este caso se pide:

$$\begin{aligned}
P(I_1') &= P(I_1'|H)P(H) + P(I_1'|H')P(H') \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + (P(I_1'|B)P(B) + P(I_1'|C)P(C))\,\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} + \left((1-\alpha)\frac{1}{2} + (1-\beta)\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2-\alpha-\beta) \\
&= \frac{4-\alpha-\beta}{6}
\end{aligned}$$

(6 ptos.)

c) Calcular la probabilidad de que el dado A haya sido seleccionado en la primera etapa si los dos primeros números obtenidos son impares.
<u>Solución</u>
Se pide:

$$P(A|I_1\cap I_2) = \frac{P(A)P(I_1\cap I_2|A)}{P(I_1\cap I_2)}$$

donde

$$\begin{aligned}
P(I_1\cap I_2) &= P(A)P(I_1\cap I_2|A) + P(B)P(I_1\cap I_2|B) + P(C)P(I_1\cap I_2|C) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\beta^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(A|I_1\cap I_2) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\beta^2}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\beta^2}{6}} = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

(6 ptos.)

d) Calcular la probabilidad de obtener un número impar en el tercer lanzamiento si se ha obtenido un número impar en los dos anteriores.
<u>Solución</u>
Se pide:

$$P(I_3|I_1\cap I_2) = \frac{P(I_1\cap I_2\cap I_3)}{P(I_1\cap I_2)}$$

donde

$$\begin{aligned}
P(I_1\cap I_2\cap I_3) &= P(A)P(I_1\cap I_2\cap I_3|A) + P(B)P(I_1\cap I_2\cap I_3|B) + P(C)P(I_1\cap I_2\cap I_3|C) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\beta^3 \\
&= \frac{1}{12} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\beta^3}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(I_3|I_1 \cap I_2) = \frac{\frac{1}{12} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\beta^3}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\beta^2}{6}} = \frac{1/2 + \alpha^3 + \beta^3}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$

(6 ptos.)