

Práctica 4

Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis

Contenido

1	Introducción	1
2	Contrastes de normalidad	1
3	Intervalos de confianza y pruebas de hipótesis sobre parámetros poblacionales	3
3.1	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis para la media de una población	4
3.2	Contraste de igualdad de medias de dos poblaciones	7
3.2.1	Contraste de medias para muestras independientes	7
3.2.2	Contraste de medias para muestras relacionadas	9
4	Bibliografía	9

1 Introducción

Los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis son dos herramientas estadísticas íntimamente relacionadas, hasta el punto de que SPSS las muestra conjuntamente. Es decir, cuando solicitamos la realización de una prueba de hipótesis, SPSS incluye en los resultados el cálculo del intervalo de confianza correspondiente a la prueba.

El objetivo de esta práctica es obtener e interpretar los resultados de aquellas pruebas de hipótesis que centran sus afirmaciones en alguno de los parámetros de la población (pruebas paramétricas).

2 Contrastes de normalidad

Los estadísticos utilizados en las pruebas paramétricas que se van a describir en las siguientes secciones, requieren que las distribuciones de las poblaciones bajo estudio sean normales. Sin embargo, el Teorema Central del Límite asegura la distribución normal asintótica (es decir, cuando el tamaño de las muestras tiende a infinito), del estadístico media muestral, lo que nos permite suponer normalidad cuando la muestra es de tamaño

grande. Este hecho permite considerar estas pruebas paramétricas tanto en poblaciones normales como en poblaciones no normales con un tamaño muestral suficientemente grande. No obstante, en el caso de no especificar la distribución de la población es posible contrastar la hipótesis de normalidad de las poblaciones del estudio antes de realizar la prueba de hipótesis.

En una gran parte de los contrastes paramétricos, estamos interesados en trabajar con muestras de tamaño no muy grandes y se asume como hipótesis la normalidad de la población. De ahí que sea habitual efectuar un test de bondad de ajuste a la normal antes de aplicar dichos contrastes. Aunque el análisis de la normalidad requiere herramientas que no se abordan en la Asignatura, daremos aquí una idea básica de cómo visualizar este hecho con SPSS. En esta práctica, sólo describimos el análisis de normalidad que se realiza en base al procedimiento **Explorar**, asunto del que trata el siguiente ejercicio.

Vamos a poner en práctica este contraste en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1

Haz un estudio de normalidad de la variable `distanci` (cuya etiqueta es `Distancia (mm)` del centro de la pituitaria a la fisura ptringo-maxilar) en el fichero `Estudio de crecimiento.sav` que se encuentra en el directorio principal de SPSS.

SOLUCIÓN: i) Abre el fichero `Estudio de crecimiento.sav`.

ii) En la barra de menú, pulsa



con lo que se abre el cuadro de diálogo **Explorar**.

iii) En la ventana de la izquierda selecciona la variable `Distancia (mm)` del centro de la pituitaria a la fisura ptringo-maxilar [`distanci`], y con el botón  trasládala a la ventana **Dependientes**:

iv) En el grupo **Mostrar** elige la opción **Ambos**.

v) Pulsa el botón , y en el cuadro de diálogo que se abre, elige la opción **Ninguno** en el grupo **Diagrama de caja**, y marca **Histograma** en el grupo **Descriptivos**.

vi) Marca la opción **Gráficos con pruebas de normalidad**, y cierra el cuadro de diálogo con el botón . Por último pulsa el botón .

Observa ahora los cuadros que aparecen en el visor de resultados: El primero, de título **Resumen del procesamiento de los casos** no es más que un recuento del número de casos válidos y perdidos, expresados también en porcentajes. En el segundo cuadro **Descriptivos**, aparecen calculadas diversas medidas de centralización y de dispersión de los datos de la muestra, medidas que se estudiaron en el Tema 1 de la asignatura y que no son más que valores de estadísticos muestrales. También se incluyen los límites del intervalo de confianza del 95% (si no has elegido antes otro nivel de confianza). En la última columna aparece el error típico de la media, que como recordarás es la desviación típica de dicho estadístico (¿sabrías comprobarlo usando la calculadora de SPSS?).

En el cuadro **Pruebas de normalidad**, se muestran los resultados de dos contrastes de hipótesis sobre la normalidad de la población de la que proceden los datos. Son los contrastes de Kolmogorov-Smirnov y de Shapiro-Wilks. Se trata de pruebas *no paramétricas* que la limitada extensión de la asignatura no nos ha permitido estudiar. En el cuadro

aparecen, tanto en una como en otra prueba, los valores del estadístico de contraste, 0.072 y 0.984, el número de grados de libertad, 108 en los dos casos, y los valores P (a los que SPSS designa por Sig.), 0.200 y 0.222, valores lo bastante grandes como para que no rechacemos la hipótesis de que la muestra procede de una población normal ¹.

Ahora observa los gráficos: El primero es un histograma que SPSS genera dividiendo los datos en clases de forma automática. En nuestro ejemplo ha tomado 16 clases. La forma del histograma, que sugiere una curva con forma de campana, abunda en la hipótesis de normalidad de la variable.

El segundo es un *gráfico Q-Q*, que se conoce habitualmente como *gráfico cuantil-cuantil* (en inglés *quantile-quantile*, de ahí el nombre que le da SPSS) y consiste en un diagrama de dispersión que en el eje horizontal tiene los cuantiles de la distribución de frecuencias (es decir del conjunto de datos), y en el vertical los mismos cuantiles pero de una distribución de probabilidad normal estándar. Si los datos de la distribución de frecuencias procedieran de una distribución normal, los puntos del diagrama estarían situados sobre una recta. Como puedes observar, tal situación se da con bastante aproximación en la figura, lo que es un argumento más a favor de la normalidad de los datos.

3 Intervalos de confianza y pruebas de hipótesis sobre parámetros poblacionales

Vamos a realizar a continuación algunos contrastes y a calcular intervalos de confianza, de los estudiados en la Asignatura. Como se ha indicado al principio, SPSS lleva a cabo simultáneamente ambos procedimientos, para lo que debemos pulsar en la barra de menú:

Analizar → Comparar medias

lo que desplegará el menú:

Medias...
Prueba T para una muestra...
Prueba T para muestras independientes...
Prueba T para muestras relacionadas...
ANOVA de un factor...

De las cinco opciones, sólo usaremos en los ejercicios que siguen, la segunda, tercera y cuarta.

Los resultados de las pruebas de hipótesis son presentados por el paquete estadístico SPSS con una serie de características similares en todos ellos. Para entender los cuadros que van a parecer en el *Visor de resultados* en los ejercicios que siguen, observemos el cuadro:

¹Para más información acerca de estos test de normalidad, puedes consultar cualquier texto avanzado de Estadística, por ejemplo *Estadística, Modelos y Métodos* vol 1. *Fundamentos*. Daniel Peña Sánchez de Rivera. Alianza Universidad Textos.

Prueba para una muestra ^a						
	Valor de prueba = 25000					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Salario inicial	0.887	188	0.376	408.598	-500.13	1317.32

a. Sexo = Hombre, Facultad = Económicas

La hipótesis a probar, o en su caso el nombre de la prueba, viene indicado por el título de la tabla. La nota al pie de la tabla, indicada con una ^a en el título, es una aclaración sobre la variable, que aparece si ésta lo requiere. El significado de las celdas de esta tabla es:

- El **valor de prueba** μ_0 que atribuimos al parámetro bajo contraste. En el cuadro anterior es 25000.
- El **nombre de la variable**, en este caso, Salario inicial.
- El **nombre t** y el **valor 0.887** del **estadístico de contraste**.
- Los **grados de libertad gl** del estadístico, que en este caso son 188.
- El **p-valor** de la prueba, al que SPSS llama **Sig** o **Sig (bilateral)**. Su valor en el cuadro es 0.376.
- La **diferencia de medias**, que en este ejemplo vale 408.598, es la diferencia entre la media muestral y el valor de prueba.
- El **intervalo de confianza para la diferencia**, del 95% en este ejemplo y sus **extremos inferior y superior**, -500.13 y 1317.32. Es el intervalo de confianza para la diferencia $\mu - \mu_0$ (donde $\mu_0 = 25000$ es el valor de prueba), de ahí el nombre. Cuando $\mu_0 = 0$, tenemos el tradicional intervalo de confianza para la media μ .

3.1 Intervalo de confianza y prueba de hipótesis para la media de una población

El objetivo es plantear un contraste de la forma:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0; \\ H_1 : \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

SPSS siempre considera que la varianza poblacional es desconocida (lo cual es apropiado puesto que se trata de un parámetro). Por lo tanto, en el supuesto de ser cierta la hipótesis nula, el estadístico utilizado en esta prueba es la media muestral, que tipificada con la estimación de la desviación típica, sigue una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad (donde n es el tamaño de la muestra), es decir

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

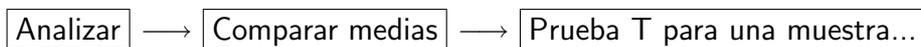
Vamos a poner en práctica este contraste en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2

El archivo de datos **Salarios de Licenciados Universidad de Florida.sav** que se encuentra en el directorio principal de SPSS v.12, contiene datos relativos a salario, sexo y titulaciones de 1100 Licenciados en la Universidad de Florida.

- a) Halla un intervalo de confianza para el salario medio basado en la muestra de los 1100 licenciados al 90% de confianza.
- b) Prueba la hipótesis de que el salario medio es 26000 dólares al nivel de significación $\alpha = 0.10$ basándote en la muestra dada.
- c) Repite el apartado b) pero con un salario medio de 25000 dólares.

SOLUCIÓN: i) Para realizar esta prueba de hipótesis pulsamos en la barra de menú



Como resultado de esta operación aparece el cuadro de diálogo **Prueba T para una muestra** donde habrá que especificar:

- La población², cuya media μ se quiere contrastar, en este caso, la variable **Salario inicial [salario]**, para lo que habrá que seleccionarla en la ventana de la izquierda, y pasarla a la ventana de la derecha **Contrastar variables** pulsando el botón .
- El valor de μ_0 (en la ventana **Valor de prueba**) que en nuestro problema es 26000 para el apartado b) y 25000 para el c).

ii) El botón Opciones abre al pulsarlo, otro cuadro de diálogo que permite especificar el nivel de confianza $100(1 - \alpha)\%$ deseado para el intervalo de confianza (por defecto será del 95%) y el tratamiento de los valores perdidos. En nuestro caso, el nivel de confianza es del 90% según se indica en los apartados a) y b) del ejercicio. Además, como sólo realizaremos contrastes sobre una población, no nos preocuparemos de la forma de exclusión de los valores perdidos. Para más información acerca de esta cuestión puedes pulsar el botón Ayuda que como en este, aparece en casi todos los cuadros de diálogo de SPSS.

iii) Una vez cerrados los cuadros de diálogo con los botones Continuar y Aceptar se abrirá el visor de resultados con un cuadro como el siguiente:

Prueba para una muestra						
	Valor de prueba = 26000					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	90% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Salario inicial	0.306	1099	0.760	64.205	-281.66	410.07

²Pueden contrastarse varias variables a la vez, aunque independientemente unas de otras. Ahora bien, el valor de prueba y el nivel de confianza que utilicemos habrá de ser el mismo para todas.

(Este cuadro corresponde al apartado b) del ejercicio, para el apartado c) debes usar 25000 como valor de prueba).

Como el intervalo de confianza que proporciona SPSS $[-281.66, 410.07]$, corresponde al parámetro $\mu - 26000$, el intervalo para μ será $[26000 - 281.66, 26000 + 410.07] = [25718.34, 26410.07]$. En cuanto a la prueba de hipótesis, el valor P , bastante alto que resulta (0.760) nos conduce a la decisión de no rechazar la hipótesis nula y admitir por tanto que no hay evidencias significativas como para negar que el salario medio sea de 26000 dólares.

En el ejercicio que sigue se realiza un contraste similar al del ejercicio anterior, pero se introduce el concepto de *segmentación de datos*, que es una de las muchas prestaciones de SPSS.

Ejercicio 3

En el ejemplo anterior, manteniendo el nivel de confianza al 90% ¿podemos decir que el salario medio de los Licenciados en Ingeniería Industrial es igual a 24000 dólares? ¿y a 25500?

SOLUCIÓN: Aunque el procedimiento es como en el ejercicio precedente, es necesario antes, separar los datos de salarios, entre los que corresponden a las distintas titulaciones, es decir a los distintos valores de la variable **facultad**, para lo que procedemos de este modo:

i) En la barra de menú, pulsamos

Datos → Segmentar archivo...

En el cuadro de diálogo que se abre, elige la opción **Organizar los resultados por grupos** y en la ventana de la izquierda marca la variable que va a segmentar los datos en grupos, en nuestro caso **Facultad [facultad]** y con el botón ▶, trasládala a la ventana de la derecha de nombre **Grupos basados en:**

ii) La pulsación del botón Aceptar no produce ningún efecto aparente, pero el conjunto de valores de cada una de las variables del archivo queda subdividido de acuerdo con las distintas titulaciones. Cualquier análisis estadístico que hagamos ahora, se efectuará sobre cada uno de los *segmentos* en que está dividido el archivo.

iii) Tomamos como valor de prueba 24000, según se nos pide en el enunciado y procedemos igual que en el ejercicio anterior, pues como allí, se trata de probar hipótesis sobre la media de la población **salario**, la única diferencia es que ahora en el visor de resultados, aparecerán tantos cuadros de resultados como titulaciones haya (es decir, tantos como *segmentos* en los que hemos dividido el conjunto de casos). Buscamos el cuadro correspondiente a Ingeniería Industrial, que es:

Prueba para una muestra ^a						
	Valor de prueba = 24000					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	90% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Salario inicial	22.215	280	9.833×10^{-64}	6876.868	6365.99	7387.74

a. Facultad = I. Industriales

El valor exageradamente pequeño 9.833×10^{-64} del valor P nos lleva a rechazar la hipótesis de que el salario medio de los Ingenieros Industriales es de 24000 dólares. Recuerda, del ejercicio anterior, que el intervalo e confianza para el salario medio de los Ingenieros Industriales es: $[24000 + 6365.99, 24000 + 7387.74] = [30365.99, 31387.74]$.

iv) Por último, realiza de nuevo los cálculos, pero ahora con el otro valor de prueba 25500 del enunciado.

3.2 Contraste de igualdad de medias de dos poblaciones

Los contrastes sobre la diferencia de las medias de dos poblaciones, los lleva a cabo SPSS tomando siempre como valor de prueba $\mu_0 = 0$, es decir, sólo prueba igualdad de medias, con lo cual la prueba de hipótesis se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0; \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{cases}$$

Las muestras que provienen de las dos poblaciones de interés pueden ser independientes o pareadas. Dependiendo de lo cual, el tratamiento del contraste de igualdad de medias difiere tanto en los estadísticos a utilizar como en los procedimientos de SPSS. En ambos casos, la tabla de los resultados, que es similar, aunque algo más amplia a la de la página 6, contiene el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ correspondiente a un nivel de confianza del $100(1 - \alpha)\%$.

3.2.1 Contraste de medias para muestras independientes

Como hemos comentado, SPSS siempre supone que las varianzas de las poblaciones son desconocidas, que es una situación realista. Lo que no decide es si éstas pueden considerarse iguales o distintas, de modo que realiza al mismo tiempo dos contrastes sobre la diferencia de medias, uno suponiendo varianzas iguales y otro suponiéndolas distintas, dejando la decisión final en manos del usuario.

Ejercicio 4

A partir de los datos del archivo `Datos de empleados.sav` realiza un contraste sobre la igualdad de medias de la variable `salario` (Salario actual) según los valores 1 y 2 ("Administrativo" y "Seguridad") de la variable `catlab` (Categoría laboral), a un nivel de significación $\alpha = 0.01$.

SOLUCIÓN: i) Abre el fichero `Datos de empleados.sav` que se encuentra en el directorio principal de SPSS. Una vez abierto, en la vista de variables, observa que la variable

catlab toma cuatro valores distintos: 0, 1, 2, 3, correspondientes a diferentes categorías laborales. El problema consiste en contrastar la diferencia de los salarios actuales medios de las categorías 1 y 2 ("Administrativo" y "Seguridad"). Para ello pulsa en la barra de menú

Analizar →
 Comparar medias →
 Prueba T para muestras independientes...

con lo que aparece el cuadro de diálogo **Prueba T para muestras independientes** en el que habrá que especificar:

- La variable³ que se quiere contrastar, que debe ser tal que la muestra disponible pueda dividirse en, al menos dos muestras independientes. En nuestro caso, dicha variable es **Salario actual [salario]**. Una vez marcada en la ventana de la izquierda, mediante el botón ▶, se traslada a la ventana derecha **Contrastar variables**.
- La variable a partir de la cual se agrupan los datos de la variable que se quiere contrastar, en dos muestras independientes. En este caso, es la variable **Categoría laboral [catlab]**, que debes marcar en la ventana izquierda y trasladarla mediante el botón ▶ a la ventana de la derecha **Variable de agrupación**.

ii) A continuación, pulsa el botón **Definir grupos**, tras lo cual aparece un cuadro de diálogo con dos opciones: **Usar valores especificados** y **Punto de corte**, de las que debes elegir para este problema, la primera. Ahora debes escribir en **Grupo 1** y **Grupo 2**, los valores de la variable de agrupación (**catlab**) que dividen en dos los valores de la variable **salario**, constituyendo así las dos muestras. Estos valores son 1 y 2 respectivamente, que corresponden a las categorías laborales "Administrativo" y "Seguridad". Pulsa Continuar, para cerrar este cuadro.

iii) Al regresar al cuadro **Prueba T para muestras independientes**, pulsa el botón Opciones para introducir el nivel de confianza deseado, que en este ejercicio es el 99%, en la ventana **Intervalo de confianza** (por defecto es el 95%). Como en los ejercicios anteriores ignora el grupo **Valores perdidos** y concluye pulsando Continuar.

iv) Finalmente pulsa el botón Aceptar.

v) Observa el cuadro de resultados, similar al de la página 6 que aparece en la vista de resultados de SPSS. La prueba para igualdad de varianzas se llama *prueba de Levene* (no la estudiamos en la Asignatura), y como todas las pruebas, rechaza la hipótesis nula (igualdad de varianzas) si el valor P (**Sig.** en el cuadro) es muy pequeño, como efectivamente ocurre, ya que como puedes observar es 4.949×10^{-5} . Por ello, en este caso no debe admitirse la igualdad de varianzas, y de los dos test que realiza SPSS debemos quedarnos con el primero. Para este test, observa que el valor P obtenido es 4.075×10^{-7} , un valor extremadamente pequeño, mucho menor que el usual nivel de significación $\alpha = 0.05$, por lo que debemos rechazar la hipótesis de igualdad de salarios medios entre las dos categorías laborales.

³Véase la nota de la página 5

3.2.2 Contraste de medias para muestras relacionadas

El siguiente ejercicio consiste en un contraste con medias pareadas (o relacionadas).

Ejercicio 5

Se desea comparar la calidad de dos nuevas clases de trigo. Para ello, se toman 10 fincas al azar situadas en diferentes localidades, y se siembra en cada una de ellas las dos clases del cereal. La producción en las 10 fincas fue la siguiente:

Clase A: 57 49 60 55 57 48 50 61 52 56
Clase B: 55 48 58 56 54 48 52 56 50 58

- a) ¿Podemos aceptar que la producción es la misma para ambas clases de trigo a un nivel de significación $\alpha = 0.05$?, ¿y a un nivel $\alpha = 0.01$?
- b) Halla intervalos de confianza del 95% y del 99% para la media de las diferencias de producciones de ambas clases de trigo.

SOLUCIÓN: i) Comenzamos definiendo en la vista de variables dos variables de tipo numérico, de nombres *ClaseA* y *ClaseB*, y a continuación, en la vista de datos introducimos los valores de la tabla del enunciado.

ii) En la barra de menú, pulsamos

Analizar →
 Comparar medias →
 Prueba T para muestras relacionadas...

y aparece el cuadro de diálogo **Prueba T para muestras relacionadas** donde habrá que especificar las dos variables sobre las que se quiere realizar la prueba de hipótesis, es decir, *ClaseA* y *ClaseB*. Al marcar ambas en la ventana de la izquierda, sus nombres aparecen en el grupo **Selecciones actuales**. Ahora, al pulsar el botón , pasan emparejadas a la ventana de la derecha **Variables relacionadas**.

ii) En el mismo cuadro de diálogo, pulsa el botón **Opciones...** para elegir el valor del nivel de confianza al 95%. Cierra este último cuadro pulsando Continuar y finalmente Aceptar.

iii) Observa en el cuadro de resultados que el valor P de la prueba, **0.195** (mayor que el nivel de significación 0.05), no nos permite rechazar la hipótesis nula, Asimismo observa que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias, $[-.61726, 2.61726]$ contiene al cero, lo que corrobora el que no podemos rechazar que las medias son iguales.

iv) Termina el problema con los otros valores de los niveles de significación y confianza propuestos en el enunciado.

4 Bibliografía

Manual de SPSS de la Universidad de Cádiz.

<http://www2.uca.es/serv/ai/formacion/spss/Inicio.pdf>

Cuaderno de prácticas de SPSS de la asignatura Análisis de datos en Psicología I. Universidad Autónoma de Madrid.

http://www.uam.es/personal_pdi/psicologia/carmenx/MaterialD.html

Manzano, V. et al. *SPSS para Windows*. Madrid, Ra-Ma,.

Pérez, César, *Técnicas Estadísticas con SPSS*. Prentice Hall.

Portilla, M. et al. *Manual práctico del paquete estadístico SPSS 9 para Windows*. Universidad Pública de Navarra.

Manual de SPSS de la Universidad de Cádiz.

<http://www2.uca.es/serv/ai/formacion/spss/Inicio.pdf>